Lezione 16

$$H^k(M) = \{k\text{-forme chiuse}\} \big/ \{k\text{-forme esatte}\} \qquad b_k(M) = \dim H^k(M)$$

$$H^0(M) = \mathbb{R}^{\#c.c.} \qquad H^k(\mathbb{R}) \text{ è BANALE, cioè } \begin{cases} \mathbb{R} & \text{per } k=0 \\ \{0\} & \text{per } k>0 \end{cases}$$

Oss: M^n cpt senza bordo orientata $\Rightarrow H^n(M) \neq \{0\}$

$\omega \in \Omega^n(M)$ FORMA VOLUME $\quad d\omega = 0 \quad$ non è esatta per Stokes

Lemma di Poincaré: $H^*(\mathbb{R}^n)$ è banale

$$\Uparrow$$

H^* invariante per omotopia

CARTAN'S MAGIC FORMULA

M varietà $\quad X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\mathcal{L}_X : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

$$\iota_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M) \qquad \omega \in \Omega^k(M)$$

Esercizio:

$$d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^k \omega\wedge d\eta$$ ANTIDERIVAZ.

$$\mathcal{L}_X(\omega\wedge\eta) = \mathcal{L}_X\omega\wedge\eta + \omega\wedge\mathcal{L}_X\eta$$ DERIVAZIONE

$$\iota_X(\omega\wedge\eta) = \iota_X\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge\iota_X\eta$$ ANTIDERIVAZ.

$$\iota_X\circ\iota_X = 0 \qquad d\circ d = 0$$

$$\mathcal{L}_X\circ d = d\circ\mathcal{L}_X \qquad \mathcal{L}_X\circ\iota_X = \iota_X\circ\mathcal{L}_X$$

Prop:

$$\boxed{\underbrace{\mathcal{L}_X}_{\text{DER}} = \underbrace{d\circ\iota_X}_{\text{ANTI, ANTI}} + \iota_X\circ d}$$ Cartan

DER

dim:

Mostrare l'uguaglianza per le 0- e 1-forme:

$$f\in\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$$

$$\mathcal{L}_X f \overset{?}{=} \underbrace{(d \circ \iota_X)(f)}_{=0} + \underbrace{\iota_X \circ d f}_{= \iota_X df}$$

$$\mathcal{L}_X f = Xf$$

OK

$U \subseteq M \quad df \in \Omega^1(U)$

$$\mathcal{L}_X df \overset{?}{=} d\iota_X df + \underbrace{\iota_X d d f}_{=0}$$

$$\mathcal{L}_X df = d\mathcal{L}_X f = d(Xf) = d\iota_X df$$

Due derivazioni che coincidono su funzioni e forme esatte coincidono su tutte le k-forme

Loc. $\omega = \sum f \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$

funz. forme esatte

COMPLESSI DI COCATENE

Def: Un COMPLESSO DI COCATENE è

$$C = \left\{ C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \right\} \quad \text{t.c. } d^{i+1} \circ d^i = 0 \quad \forall i$$

COOMOLOGIA del complesso: $H^i = \dfrac{\ker d^i}{\operatorname{Im} d^{i-1}}$ $\quad H^i(C)$

($\ker d^i$: COCICLI; $\operatorname{Im} d^{i-1}$: COBORDI)

Es: M $\quad C^i = \Omega^i(M)$

$$H^i(C) = H^i(M)$$

COBORDO (ESATTE): $d\alpha = \omega$

COCICLI (CHIUSE): $\omega \mid d\omega = 0$

Un MORFISMO di complessi $f: C \to D$ è $\quad f^i: C^i \to D^i$ t.c. $df = fd$

$$\begin{tikzcd}
C^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C^2 \arrow[r] \arrow[d, "f^2"] & \cdots \arrow[d, "f^3"] \\
D^0 \arrow[r] & D^1 \arrow[r] & D^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Induce un morfismo in coomologia $f_*: H^i(C) \to H^i(D)$

(commuta con $d \Rightarrow$ manda cobordi in cobordi, cocicli in cocicli)

$f, g : C \to D$ morfismi

$$\begin{tikzcd}
C^0 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & C^1 \arrow[r] \arrow[dl, "h"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & C^2 \arrow[r] \arrow[dl, "h"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \cdots \arrow[dl, "h"] \\
D^0 \arrow[r] & D^1 \arrow[r] & D^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

<u>Def</u>: Una OMOTOPIA DI COCATENE fra f e g è

$$h^i : C^{i+1} \to D^i \quad \text{t.c.}$$

$$f - g = hd + dh$$

<u>Oss</u>: Se f e g sono omotope, $f_* = g_* : H^k(C) \to H^k(D)$

$$[a] \in H^k(C) \qquad da = 0$$

$$f(a) - g(a) = h\underbrace{da}_{=0} + dha \Rightarrow [fa] = [ga]$$

<u>Teo</u>: $f, g : M \to N$ omotope $\Rightarrow f^* = g^* : H^k(N) \to H^k(M)$

dim: $F : M \times [0,1] \to N$ liscia (posso supporre liscia)

$F_t : M \to N \qquad f = F_0 \qquad g = F_1$

$f^*, g^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ morfismi di cocatene

$h : \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$

$\omega \in \Omega^k(N) \qquad M \xrightarrow{\iota_t} M \times [0,1] \xrightarrow{F} N$

$\iota_t(p) = (p,t)$

$$h(\omega) = \int_0^1 \iota_t^*\left(\iota_{\partial/\partial t} F^*(\omega)\right) dt = \eta_t \in \Omega^{k-1}(M)$$

Tesi: h omotopia fra f e g, cioè $g^* - f^* = dh + hd$

$$(g^* - f^*)(\omega) = g^*(\omega) - f^*(\omega) = F_1^*(\omega) - F_0^*(\omega)$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_t^*(\omega) = \int_0^1 i_t^* \mathcal{L}_{\partial/\partial t} F^*(\omega) =$$

$$= \int_0^1 i_t^* \left(d \circ \iota_{\partial/\partial t} + \iota_{\partial/\partial t} \circ d \right) F^*(\omega)$$

$$= \int_0^1 i_t^* d\, \iota_{\partial/\partial t} F^*(\omega) dt + \int_0^1 i_t^* \iota_{\partial/\partial t} d F^*(\omega) dt$$

$$= d \int_0^1 \iota_t^* \left(\iota_{\partial/\partial t} F^*(\omega) \right) dt + \int_0^1 \iota_t^* \left(\iota_{\partial/\partial t} F^*(d\omega) \right) dt$$

$\square$

<u>Cor</u>: M e N omot. eq. $\Rightarrow H^k(M) \cong H^k(N)$

<u>Cor</u> (Lemma di Poincaré). $H^k(\mathbb{R}^n)$ è banale

<u>Prop</u>: M^n cpt ori senza ∂ $\Rightarrow H^n(M)$ non è banale

$\Rightarrow M$ non è contrattile

Es: S^n non è contrattile $\qquad (n \geq 2$ è sempl. conn.$)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ ‖
$\qquad\qquad\qquad$ omot. eq. a $\bullet$

Def: X, Y sono OMOT. EQUIV. se $\exists \; X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ t.c. $f \circ g \simeq id_Y$

OMOTOPO

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g \circ f \simeq id_X$

Cor: (dim)

$$M \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} N \qquad f \circ g \sim id_N \Rightarrow (f \circ g)^* = (id_Y)^* = id_{H^k(N)}$$

$$g \circ f \sim id_M \qquad\qquad (f\circ g)^* = g^* \circ f^* \Rightarrow g^* \circ f^* = id$$

$$\Downarrow$$

$$f^* \circ g^* = id$$

SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS

Def: Una SUCCESSIONE ESATTA è una successione

$$\cdots \xrightarrow{d} V_i \xrightarrow{d_i} V_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} V_{i+2} \xrightarrow{d_{i+2}} \cdots$$

t.c. $\operatorname{Im} d_i = \ker d_{i+1}$ (più forte che $d \circ d = 0$)

Es: $0 \xrightarrow{0} V_0 \xrightarrow{f} V_1 \longrightarrow \cdots$ $V_{i-1} \xrightarrow{g} V_i \xrightarrow{0} 0$

succ. esatta $\Rightarrow$ f iniettiva $\Rightarrow$ g suriettiva

$0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \longrightarrow 0$ esatta $\Leftrightarrow$ f iniettiva & suriettiva $\Leftrightarrow$ f isom.

SUCC. ESATTA CORTA $0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$

esatta $\Leftrightarrow$ ⊙ f iniett.

⊙ g suriett.

⊙ $\operatorname{Im} f = \ker g$

Ex: $\to V_{i-1} \xrightarrow{f} V_i \xrightarrow{g} V_{i+1} \to \cdots$ esatta V_i sp. vett.

$\Downarrow$

$\leftarrow V_{i-1}^* \xleftarrow{f^*} V_i^* \xleftarrow{g^*} V_{i+1} \leftarrow$ esatta $\quad \|$ W sp. vett.

$$V_{i-1}\otimes W \xrightarrow{f\otimes id} V_i \otimes W \xrightarrow{g\otimes id} V_{i+1}\otimes W$$
$\Downarrow$ esatta

Es: $0 \to V_1 \to V_2 \to \cdots \to V_k \to 0$ esatta

sp. vettoriali

dim $< +\infty$

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \dim V_i = 0$$

Teo: $\boxed{0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0}$ succ. esatta corta di complessi di cocatene

$\delta : H^i(C) \to H^{i+1}(A)$

Ψ

$[a]$

$da = 0$

$\delta([a]) = [c]$

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d, "d"] & B_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] \arrow[d, "d"] & C_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "d"] & B_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "d"] & C_i \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] & B_{i+1} \arrow[r, "g_{i+1}"] & C_{i+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le righe sono esatte

Le colonne non necessariamente

La succ. esatta corta induce una SUCCESSIONE ESATTA LUNGA in coomologia:

$$\cdots \longrightarrow H^i(A) \xrightarrow{f_*} H^i(B) \xrightarrow{g_*} H^i(C) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^{i+1}(A) \xrightarrow{f_*} H^{i+1}(B) \xrightarrow{g_*} H^{i+1}(C) \xrightarrow{\delta}$$

$$\cdots \longrightarrow H^{i+2}(A) \cdots$$